Mecânica Analítica

1° Semestre 2016 - 3ª Avaliação

PARA SER ENTREGUE ATÉ O DIA 27/7 POR EMAIL OU DEIXAR DEBAIXO DA PORTA NA MINHA SALA

1. (*Arthur Rebello*) Uma partícula de massa m está vinculada a se mover na superfície de um cilindro de raio R cujo eixo de simetria é paralelo ao eixo z. A partícula está sujeita a uma força central elástica da forma $\vec{F} = -k\,\vec{r}$.

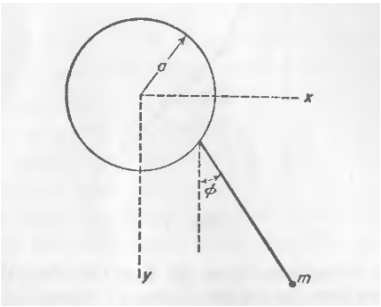
   (a) Escolha um sistema de coordenadas generalizadas que respeite a simetria do problema e determine a lagrangiana do sistema.
   (b) Obtenha os momentos canônicos conjugados.
   (c) Determine a função hamiltoniana do sistema *a partir da definição da mesma.*
   (d) Obtenha e resolva as equações de movimento de Hamilton para a partícula. Descreva o movimento.
   (e) Identifique possíveis coordenadas cíclicas. Existe alguma quantidade conservada ? Justifique.

2. (*Nathália*) Uma partícula de massa m se move em uma dimensão sob a influência de uma força dependente do tempo da forma:

$$F(x) = \frac{k}{x^2} e^{-t/\tau},$$

   onde k e τ são constantes positivas.
   (a) Obtenha a lagrangiana e a hamiltoniana do sistema.
   (b) Determine a energia total, compare com a hamiltoniana. Discuta a conservação de energia para o sistema.

3. (*Antonio*) O ponto de suspensão de um pêndulo simples de massa m e comprimento l se desloca com velocidade angular constante ω sobre uma circunferência vertical de raio a, como mostra a figura.



   (a) Determinar a lagrangiana do sistema.
   (b) Obter os momentos canônicos conjugados.
   (c) Determine a função hamiltoniana do sistema *a partir da definição da mesma.*
   (d) Obter as equações de movimento de Hamilton.
   (e) Calcular a energia total do sistema $E{=}T{+}V$. Coincide com a hamiltoniana ? Discuta.
   (f) Existem coordenadas cíclicas ? A energia é conservada ? Discuta.

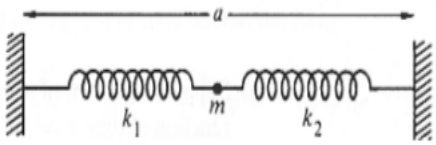
4. (*Arthur Mesquita*) Considere um pêndulo simples de massa m e comprimento l. Após o pêndulo ser posto em movimento, o comprimento do fio é encurtado a uma taxa constante:

$$\frac{dl}{dt} = -\alpha = constante.$$

O ponto de suspensão permanece fixo.
(a) Determine a lagrangiana e a hamiltoniana para o sistema.
(b) Compare a hamiltoniana e a energia total, e discuta a conservação da energia para o sistema.

5. (*Caio*) (a) Mostrar que a transformação $q = \sqrt{2P}\sin Q$, $p = \sqrt{2P}\cos Q$ é canônica.
(b) Mostre que a hamiltoniana de um oscilador harmônico unidimensional de massa *m=1* e constante elástica *k=1* é $H = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$.
(c) Mostre que na hamiltoniana escrita em termos das coordenadas *Q,P*, a coordenada *Q* é cíclica. O que representa a coordenada *P*?
(d) Resolva a equação de Hamilton para $Q(t)$ e mostre que, transformando a solução para as variáveis originais *q,p*, se obtém o resultado esperado.

6. (*Henrique*) Uma partícula de massa m pode se mover sob a influência de duas molas conectadas a pontos fixos separados por uma distância a, como mostra a figura. As molas obedecem a lei de Hooke e possuem constantes elásticas k_1 e k_2 respectivamente.
(a) Usando a posição da partícula desde um dos extermos fixos como coordenada generalizada,



determine a lagrangiana e a correspondente hamiltoniana. A energia se conserva ? A hamiltoniana se conserva ?
(b) Introduza uma nova coordenada Q, definida por:

$$Q = q - b\sin(\omega t), \qquad b = \frac{k_2 a}{k_1 + k_2}.$$

Determine a nova lagrangiana, em termos de Q. Qual é a hamiltoniana correspondente ? A energia é conservada ? A hamiltoniana é conservada?
(c) A transformação anterior é canônica?

7. (*Bernardo*) Uma bolinha de massa m desliza sem atrito por um arame em forma de ciclóide:

$$\begin{aligned} x &= a(\phi - \sin\phi) \\ y &= a(1 - \cos\phi), \qquad \phi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

(a) Faça um desenho do ciclóide e identifique o movimento da bolinha.
(b) Defina o diferencial deslocamento ao longo do ciclóide ds, integre e obtenha o valor do deslocamento s em função do ângulo ϕ.
(c) Obtenha a lagrangiana do sistema e o momento canônico conjugado à coordenada s.
(d) Determine a hamiltoniana, as equações de Hamilton e integre as mesmas.
(e) Mostre que o movimento é harmônico simples na coordenada s, e por tanto, o tempo gasto pela bolinha para descer desde qualquer ponto até a base, partindo do repouso, é independente do ponto inicial ! Calcule quanto vale esse tempo e verifique que é independente do ponto inicial.

8. (*Maron*) Partindo da formulação hamiltoniana, obtenha outra formulação da mecânica, usando como variáveis $p, \dot{p}$ e uma função $Y(p, \dot{p}, t)$. Seguindo a formulação da dinâmica hamiltoniana a partir da lagrangiana, esta nova formulação deve ser o resultado de uma transformação de Legendre, que substitua a variável q pela $\dot{p}$. A nova função $Y(p, \dot{p}, t)$ deve diferir de $H(q, p, t)$ pela soma dos produtos $q_k \dot{p}_k$, de tal modo que dY só dependa das diferenciais das $p's$ e das $\dot{p}'s$. Construa então a tranformação de Legendre que leva de $H(q, p, t)$ a $Y(p, \dot{p}, t)$ e deduza as equações de movimento

em termos de Y. Aplique ao problema do oscilador harmônico unidimensional $H = p^2/2 + \omega^2 q^2/2$. Discuta os resultados obtidos.

9. (*Conrado*) Um pêndulo esférico consiste em uma massa puntual m conectada a um fio de comprimento l, sem massa, fixo em um extremo. Consequentemente, a massa pode oscilar no hemisfério inferior de uma esfera de raio l.
(a) Determine a hamiltoniana para o pêndulo esférico, em coordenadas esféricas, a partir da definição da mesma.
(b) Defina um *potencial efetivo* V_{eff}, combinando os termos de energia potencial e momento canônico conjugado p_ϕ. Represente o V_{eff} como função de θ para diferentes valores de p_ϕ, incluindo $p_\phi = 0$.
(c) Obtenha as equações de Hamilton e analise a situação nas quais elas possam ser integradas exatamente.
(d) Em particular, discuta as soluções que reduzem o pêndulo esférico a um pêndulo plano ($p_\phi = 0$) e a um pêndulo cônico ($p_\phi = constante$). Este último caso é integrável. Obtenha a solução correspondente.

10. (*Roger*) Um certo sistema físico com um grau de liberdade tem a hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}\left[(p - aq)^2 + \omega^2 (q + bt)^2\right],$$

com ω, a e b constantes.
(a) Prove que a transformação $Q = q + bt$, $P = p - aq + b$ é canônica e determine a função geradora.
(b) Mostre que a hamiltoniana transformada é $K = (P^2 + \omega^2 Q^2)/2$.
(c) Usando a solução das equações de movimento nas novas variáveis, retorne as variáveis originais e obtenha $q(t)$.
(d) Prove que

$$R(q, p, t) = \frac{1}{2}(p - aq + b)^2 + \frac{\omega^2}{2}(q + bt)^2$$

é constante do movimento.

11. (*Bruna*) A hamiltoniana de um sistema com um grau de liberdade tem a forma:

$$H = \frac{1}{2}\left(q^4 p^2 + \frac{1}{q^2}\right).$$

(a) Escreva as equações de Hamilton e deduza uma equação diferencial de segunda ordem envolvendo apenas a coordenada q.
(b) Invente uma transformação canônica que reduza H à hamiltoniana de um oscilador harmônico: $K = (P^2 + Q^2)/2$.
(c) Sabendo que a solução geral do problema do oscilador é $Q(t) = A\cos(\omega t + \delta)$, determine $P(t)$.
(d) Retorne as variáveis originais e determine $q(t)$. Esta função é, então, a solução da equação diferencial do item (a).

12. (*Marcos Paulo*) Considere a hamiltoniana:

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{(p_2 - kq_1)^2}{2m}.$$

(a) Determine as constantes A e B de modo que a transformação

$$Q_1 = Ap_1, \qquad P_1 = p_2 - kq_1, \qquad Q_2 = B(p_1 - kq_2), \qquad P_2 = p_2$$

seja canônica.
(b) Mediante a tranformação canônica do item anterior e resolvendo as equações de movimento para as variáveis transformadas, encontre a solução das equações de movimento para $q_1(t)$ e $q_2(t)$.

13. (*Marcos Luiz*) (a) Encontre a hamiltoniana associada a lagrangiana de um oscilador harmônico amortecido:

$$L(q, \dot{q}, t) = e^{\lambda t}\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{m\omega^2 q^2}{2}\right).$$

(b) Prove que a transformação $Q = qe^{\lambda t/2}$, $P = pe^{-\lambda t/2} + (m\lambda/2)qe^{\lambda t/2}$ é canônica, e obtenha uma função geradora.
(c) Prove que a transformação:

$$Q = \frac{\overline{P}}{m\Omega}\sin\left(\frac{m\Omega\overline{Q}}{P}\right), \qquad P = \overline{P}\cos\left(\frac{m\Omega\overline{Q}}{P}\right)$$

é canônica e reduz a hamiltoniana de um oscilador harmônico de frequência angular Ω nas variáveis Q,P à hamiltoniana de uma partícula livre na variáveis $\overline{Q}, \overline{P}$.
(d) Tomando $\Omega = (\omega^2 - \lambda^2/4)^{1/2}$, aplique sucessivamente as transformações canônicas acima para resolver, no caso de amortecimento fraco, a equação de movimento do oscilador amortecido descrito pela hamiltoniana do item (a).